“第 1 章 绪论”CASIOfx-4800P 计算程序

§1.1 参考椭球元素计算

测量中，高程的基准面是大地水准面，地表某点距离大地水准面的垂直距离称为该点的高程 H ；大地坐标系的基准是参考椭球，用大地经度 L 和大地纬度 B 表示点在参考椭球表面的位置，用大地方位角 A 表示球面上边长的方向。定义参考椭球大小的元素值为：

a ——长半轴

b ——短半轴

f ——扁率 $f=\dfrac{a-b}{a}$

e ——第一偏心率 $e^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$

e' ——第二偏心率 $e^2=\dfrac{a^2-b^2}{b^2}$

c ——极曲率半径 $c=\dfrac{a^2}{b}$

我国采用过的两个参考椭球元素值以及 GPS 测量使用的参考椭球元素值列于表 1-1。

表 1-1 参考椭球元素值

坐标系名称	1954 北京坐标系	1980 西安坐标系	WGS-84 坐标系(GPS 用)
参考椭球名称	克拉索夫斯基椭球	IUGG—1975 椭球	IUGG—1979 椭球
a	6378245	6378140	6378137
b	6356863.01877	6356755.28815	6356752.31424066
f	1:298.3	1:298.257	1:298.257223563
e^2	0.006693421622966	0.006694384999588	0.00669437999013
e'^2	0.006738525414684	0.006739501819473	0.00673949674227
c	6399698.90178	6399596.65199	6399593.62601

(1) 数学模型

通过参考椭球面上任一点的法线，可以作无数个法截面，法截面与参考椭球面的交线称为法截线，球面上不同纬度及方向法截弧线的曲率半径是不相同的。

1) 子午圈曲率半径 M

通过参考椭球旋转轴南北极的法截面(也称子午面)与参考椭球面相截形成的闭合圈称为子午圈，其曲率半径 M 的计算公式为：

$$M=\frac{c}{V^3} \tag{1-1}$$

式中 $V=\sqrt{1+\eta^2}$ (1-2)

$$\eta=e'\cos B \tag{1-3}$$

2) 卯酉圈曲率半径 N

与该点子午面相垂直的法截面与参考椭球面相截形成的闭合圈称为卯酉圈，其曲率半径 N 的计算公式为：

$$N=\frac{c}{V} \tag{1-4}$$

3) 平均曲率半径 R

$$R=\sqrt{MN}=\frac{c}{V^2} \tag{1-5}$$

由于V >1，所以有 $N>R>M$ 。

4) 任意法截弧的曲率半径 R_A

方位角为 A 方向法截弧的曲率半径 R_A 的计算公式为

$$R_A=\frac{N}{1+\eta^2\cos^2 A} \tag{1-6}$$

当 A =0 时，$R_A=M$ ；当 A =90 时，$R_A=N$ 。

(2) 程序与案例

分别在 1954 北京坐标系、1980 西安坐标系和 WGS-84 坐标系中计算参考椭球表面上任意点的 M 、 N 、 R 及 R_A 。

1) 变量对照表

数学模型变量	fx-4800P 变量	单位	注释
c	C	m	极曲率半径
e'^2	E		第二偏心率
B	B	° ′ ″	大地纬度
A	A	° ′ ″	大地方位角
η	U		中间参数
V	V		中间参数
M	M	m	子午圈曲率半径
N	N	m	卯酉圈曲率半径
R	R	m	平均曲率半径
R_A	P	m	任意方向法截弧曲率半径

2) 程序

程序名：MNR

Lbl 0

{Z}

Z=54⇒C=6399698.90178: E=0.006738525414684 : ↹⇒Z=80⇒C=6399596.65199: E=0.006739501819473 : ↹⇒Z=84⇒C=6399593.62601: E=0.00673949674227 : ↹⇒Goto 0:

{BA}

U=√EcosB: V=√(1+U²)

M=C÷V ^ 3◢

N=C÷V ◢

R=C÷V²◢

P=N÷(1+(UcosA)²)◢

3) 操作步骤

设 $B=22°32′50″$ ， $A=153°19′18″$ ，分别计算其在 1954 北京坐标系、1980 西安坐标系及 WGS-84 坐标系中的 M 、 N 、 R 及 R_A 值。

将上述程序以 MNR 的文件名输入计算器后，按键[MODE]**5 2** 及[▽]选择程序 **MNR**，按键[EXE]，屏幕提示及操作步骤如下：

步骤	显示	按键	注释
1	Z? ×××	54[EXE]	大地坐标系
2	B? ×××	22[° ′ ″]32[° ′ ″]50[° ′ ″][EXE]	大地纬度
3	M=6344916.774	[EXE]	子午圈曲率半径

4	N=6381385.838	EXE	卯酉圈曲率半径
5	R=6363125.179	EXE	平均曲率半径
6	T? ×××	153 ° ′ ″ 19 ° ′ ″ 18 ° ′ ″ EXE	大地方位角
7	P=6352234.773	EXE	方位角方向曲率半径
8	Z？54	80 EXE	
9	B？22.54722222	EXE	
10	M=6344807.518	EXE	
11	N=6381281.239	EXE	
12	R=6363018.244	EXE	
13	T？153.3216667	EXE	
14	P=6352126.447	EXE	
15	Z? 80	84 EXE	
16	B？22.54722222	EXE	
17	M=6344804.56	EXE	
18	N=6381278.236	EXE	
19	R=6363015.264	EXE	
20	T？153.3216667	EXE	
21	P=6352123.479	EXE	

§1.2 边长投影计算

使用电磁波测距仪或全站仪观测得到地面某直线的水平距离 D 需要经过两次投影才能在高斯平面坐标系中进行计算。第一次投影是从地面投影到参考椭球面上，第二次投影是从参考椭球面投影到高斯平面上。

(1) 数学模型

设投影到参考椭球面上的长度为 S_0'，则计算公式为

$$S_0' = D - \left\{ \frac{H_m + h_g}{R_n} - \frac{(H_m + h_g)^2}{R_n^2} \right\} D \tag{1-7}$$

式中，H_m 为边长 D 高程，h_g 为边长所在地区大地水准面对于参考椭球面的高度，R_n 为边长中点方向上参考椭球面法截弧的曲率半径。

设参考椭球面上的长度 S_0' 投影到高斯平面上的长度为 S_0，则计算公式为

$$S_0 = S_0' + \left\{ \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} \right\} S_0' \tag{1-8}$$

式中，y_m 为直线两端点近似 y 坐标的平均值，Δy 为直线两端点近似 y 坐标的增量，R_m 为参考椭球在直线中点的平均曲率半径。当边长不长时，可以取边长中点方向法截弧曲率半径 R_A 代替 R_n 和 R_m。测区内，可以认为 h_g 为一常数，如果未知，工程计算中可以取 h_g =0。

(2)、程序与案例

分别在 1954 北京坐标系和 1980 西安坐标系中计算边长投影到高斯平面上的距离 S_0。

1) 变量对照表

数学模型变量	fx-4800P 变量	单位	注释
c	C	m	极曲率半径
e'^2	E		第二偏心率
B	B	° ′ ″	边长中点的大地纬度
A	A	° ′ ″	边长方向方位角

η	U		中间参数
V	V		中间参数
R_A	R	m	边长中点方向法截弧曲率半径
D	D	m	地面水平距离观测值
H_m	H	m	地面水平距离的高程
h_g	G	m	大地水准面对于参考椭球面的高度
y_1	Y	m	边长一端的高斯横坐标
y_2	W	m	边长另一端的高斯横坐标
y_m	K	m	边长两端高斯横坐标平均值
Δy	L	m	边长两端高斯横坐标差值
S_0'	J	m	投影到椭球面的边长值
S_0	S	m	投影到高斯平面的边长值

2) 程序

程序名：DS

Lbl 0

{Z}

Z=54⇒C=6399698.90178: E=0.006738525414684: ↖⇒Z=80⇒C=6399596.65199: E=0.006739501819473:↖⇒Goto 0◣

{BA}

U=√EcosB: V=√(1+U²):R= C÷V(1+(UcosA)²)

{DHGYW}

J=D-((H+G)÷R-(H+G)²÷R²)D◢

K=(Y+W)÷2: L=Y-W

S=J+(K²÷2÷R²+L²÷24÷R²)J

3) 操作步骤

设 $B=22^\circ 33' 04''$，$A=107^\circ 41' 02''$，y_1=210154m，y_2=213577m，D=3591.293m，H_m=35.4m，h_g=4.3m，分别计算其在 1954 北京坐标系和 1980 西安坐标系中的高斯平面距离值。

将上述程序以 DS 的文件名输入计算器后，按键MODE**5 2** 及▽选择程序 **DS**，按键EXE，屏幕提示及操作步骤如下：

步骤	显示	按键	注释
1	Z? ×××	54EXE	大地坐标系
2	B? ×××	22°′″33°′″04°′″EXE	大地纬度
3	A? ×××	107°′″41°′″02°′″EXE	大地经度
4	R=6378004.388	EXE	平均曲率半径
5	D? ×××	3591.293EXE	地面水平距离观测值
6	H？×××	35.4EXE	地面水平距离的高程
7	G？×××	4.3EXE	大地水准面相对参考椭球面的高度
8	J=3591.270646	EXE	投影到椭球面的边长值
9	Y? ×××	210154EXE	边长一端的高斯横坐标
10	W? ×××	213577EXE	边长另一端的高斯横坐标
11	S=3593.252075	EXE	投影到高斯平面的边长值
12	Z? 54	80EXE	
13	B? 22.55111111	EXE	
14	A? 107.6838889	EXE	

15	R=6377899.354	EXE	
16	D? 3591.293	EXE	
17	H？35.4	EXE	
18	G？4.3	EXE	
19	J=3591.270646	EXE	
20	Y? 210154	EXE	
21	W? 213577	EXE	
22	S=3593.25214	EXE	

§1.3 高斯投影正算与子午线收敛角的计算

将大地经纬度为 L 、 B 的点投影到高斯平面上并求出其坐标 x 、 y 称高斯投影正算，令 γ 为子午线收敛角。

(1) 数学模型

$$x = X + Nt\left[\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{24}(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)m^4 + \frac{1}{720}(61 - 58t^2 + t^4)m^6\right] \tag{1-9}$$

$$y = N\left[m + \frac{1}{6}(1 - t^2 + \eta^2)m^3 + \frac{1}{120}(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)m^5\right] \tag{1-10}$$

$$\gamma^0 = \frac{t}{\pi}\left[180m + 60(1 + 3\eta^2 + 2\eta^4)m^3 + 12(2 - t^2)m^5\right] \tag{1-11}$$

γ^0 表示以十进制度为单位的子午线收敛角。

式中 $t = \tan B$ (1-12)

$$m = \cos Bl\frac{\pi}{180} \tag{1-13}$$

N 为卯酉圈曲率半径，计算公式见(1-4)， η 的计算公式见(1-3)， X 为子午线弧长。对于克拉索夫斯基椭球：

$$X = 111134.8611B^0 - (32005.7799\sin B + 133.9238\sin^3 B + 0.6973\sin^5 B + 0.0039\sin^7 B)\cos B \tag{1-14}$$

对于 IUGG1975 椭球：

$$X = 111133.0047B^0 - (32009.8575\sin B + 133.9602\sin^3 B + 0.6976\sin^5 B + 0.0039\sin^7 B)\cos B \tag{1-15}$$

(2)、程序与案例

分别在 1954 北京坐标系和 1980 西安坐标系中进行高斯投影正算。

1) 变量对照表

数学模型变量	fx-4800P 变量	单位	注释
c	C	m	极曲率半径
e'^2	E		第二偏心率
B	B	° ′ ″	大地纬度
l	L	° ′ ″	经度差
η	U		中间参数
V	V		中间参数
t	T		中间参数
m	M		中间参数
X	F	m	子午线弧长

N	N	m	卯酉圈曲率半径
x	X	m	高斯平面纵坐标
y	Y	m	高斯平面横坐标

2) 程序

程序名：GSJSZ

```
Lbl 0
{ZLB}
S=sinB
Z=54⇒C=6399698.90178: E=0.006738525414684 :
F=111134.8611B-(32005.7799S+133.9238S^3+0.6973S^5 +0.0039S^7)cosB: Goto 1:
Z=80⇒C=6399596.65199: E=0.006739501819473 :
F=111133.0047B-(32009.8575S+133.9602S^3+0.6976S^5 +0.0039S^7)cosB:
⇒Goto 0 :
Lbl 1
U=√EcosB: V=√(1+U²):N= C÷V
T=tanB: M=(cosB)Lπ÷180
X=F+NT(0.5M²+24^-1(5-T²+9U²+4U^4)M^4+720^-1(61-58T²+T^4)M^6)
Y=N(M+6^-1(1-T²+U²)M^3+120^-1(5-18T²+T^4+14U²-58U²T²)M^5)
R=T÷π×(180M+60(1+3U²+2U^4)M^3+12(1-T²)M^5)
```

提示：常数π后的×不能省略。

3) 操作步骤

设 L =113°25′31.4880″ B = 21°58′47.0845″，分别计算其在 1954 北京坐标系和 1980 西安坐标系中的高斯平面坐标。

将上述程序以 GSJSZ 的文件名输入计算器后，按键[MODE]**5 2** 及[▽]选择程序 **GSJSZ**，按键[EXE]，屏幕提示及操作步骤如下：

步骤	显示	按键	注释
1	B? ×××	21[°'"]58[°'"]47.0845[°'"][EXE]	大地纬度
2	Z? ×××	54[EXE]	大地坐标系
3	L? ×××	2[°'"]25[°'"]31.488[°'"][EXE]	经度差
4	X=2433586.693	[EXE]	高斯平面坐标
5	Y=250547.4031	[EXE]	
6	R=0°54′29.72″	[EXE][SHIFT][←]	子午线收敛角
7	B? 21.97974569	[EXE]	
8	Z? 54	80[EXE]	
9	L? 2.425413333	[EXE]	
10	X=2433544.44	[EXE]	
11	Y=250543.2955	[EXE]	
12	R=0°54′29.72″	[EXE][SHIFT][←]	

§1.4 高斯投影反算与子午线收敛角的计算

计算高斯平面坐标为 x、y 的点在参考椭球面上的大地经纬度 L、B 称高斯投影反算，令 γ 为子午线收敛角。

(1) 数学模型

$$B^0 = B_f^0 - \frac{1+\eta_f^2}{\pi} t_f \left[90n^2 - 7.5(5+3t_f^2+\eta_f^2-9\eta_f^2 t_f^2)n^4 + 0.25(61+90t_f^2+45t_f^4)n^6\right] \quad (1\text{-}16)$$

$$l^0=\frac{1}{\pi\cos B_f}\left[180n-30(1+2t_f^2+\eta_f^2)n^3+1.5(5+28t_f^2+24t_f^4)n^5\right] \tag{1-17}$$

$$\gamma^0=\frac{t_f}{\pi}\left[180n-60(1+t_f^2-\eta_f^2)n^3+12(2+5t_f^2+3t_f^4)n^5\right] \tag{1-18}$$

B_f^0、B^0、l^0、γ^0 分别是以十进制度为单位的底点纬度、纬度、经度差和子午线收敛角，其余符号的计算公式如下：

$$n=\frac{y}{N_f}=\frac{yV_f}{c} \tag{1-19}$$

$$V_f=\sqrt{1+\eta_f^2} \tag{1-20}$$

$$\eta_f=e'\cos B_f \tag{1-21}$$

$$t_f=\tan B_f \tag{1-22}$$

底点纬度 B_f^0 的计算公式，对于克拉索夫斯基椭球为：

$$\begin{aligned}B_f^0=&27.11115372595+9.02468257083(X-3)-0.00579740442(X-3)^2\\&-0.00043532572(X-3)^3+0.00004857285(X-3)^4\\&+0.00000215727(X-3)^5-0.00000019399(X-3)^6\end{aligned} \tag{1-23}$$

对于 IUGG1975 椭球为：

$$\begin{aligned}B_f^0=&27.11162289465+9.02483657729(X-3)-0.00579850656(X-3)^2\\&-0.00043540029(X-3)^3+0.00004858357(X-3)^4\\&+0.00000215769(X-3)^5-0.00000019404(X-3)^6\end{aligned} \tag{1-24}$$

上式中的 $X=x/10^6$，也即以千公里为单位的点的 x 坐标。

(2)、程序与案例

分别在 1954 北京坐标系和 1980 西安坐标系中进行高斯投影反算。

1) 变量对照表

数学模型变量	fx-4800P 变量	单位	注释
c	C	m	极曲率半径
e'^2	E		第二偏心率
B_f^0	F	°	底点纬度
B^0	B	°	纬度
l^0	L	°	经度差
n	N		
η_f	U		
V_f	V		
t_f	T		
X -3	W	kkm	改化后的高斯平面纵坐标
x	X	m	高斯平面纵坐标
y	Y	m	高斯平面横坐标

2) 程序

程序名：GSJSF

Lbl 0

{ZXY}

W = X ÷ E6 -3

Z = 54 ⇒ C = 6399698.90178: E = 0.006738525414684

F = 27.11115372595 + 9.02468257083W-0.00579740442W^2-0.00043532572W ^ 3 + 0.00004857285W ^ 4 + 0.00000215727W ^ 5-0.00000019399W ^ 6 ◢ Goto 1: ◣

Z = 80 ⇒ C = 6399596.65199: E = 0.006739501819473 :

F = 27.11162289465 + 9.02483657729W-0.00579850656W^2-0.00043540029W ^ 3 + 0.00004858357W ^ 4 + 0.00000215769W ^ 5-0.00000019404W ^ 6 ◢ ⇔ Goto 0 : ◣

Lbl 1

U = √ EcosF: V = √ (1 + U^2)

N = YV ÷ C: T = tanF

B = F-(1 + U^2)T ÷ π × (90N^2-7.5(5 + 3T^2 + U^2-9U^{2}T^2)N ^ 4 + 0.25(61 + 90T^2 + 45T ^ 4)N ^ 6) ◢

L = (π × cosF)$^{-1}$(180N-30(1 + 2T^2 + U^2)N ^ 3 + 1.5(5 + 28T^2 + 24T ^ 4)N ^ 5) ◢

R = T ÷ π × (180N-60(1 + T^2-U^2)N ^ 3 + 12(2 + 5T^2 + 3T ^ 4)N ^ 5)

3) 操作步骤

设 x = 2433586.693，y =250547.403，计算其在 1954 北京坐标系中的大地经纬度与子午线收敛角；x = 2433544.44，y =250543.2955，计算其在 1980 西安坐标系中的的大地经纬度与子午线收敛角。

将上述程序以 GSJSF 的文件名输入计算器后，按键[MODE]**5 2** 及[▽]选择程序 **GSJSF**，按键[EXE]，屏幕提示及操作步骤如下：

步骤	显示	按键	注释
1	X? ×××	2433586.693[EXE]	高斯平面坐标
2	Z? ×××	54[EXE]	大地坐标系
3	F=21.99767745	[EXE]	底点纬度
4	Y=250547.403	250547.403[EXE]	高斯平面坐标
5	B=21 ° 58 ′ 47.08 ″	[EXE][SHIFT][←]	大地纬度
6	L= 2 ° 25 ′ 31.49 ″	[EXE][SHIFT][←]	经度差
7	R=0 ° 54 ′ 29.72 ″	[EXE][SHIFT][←]	子午线收敛角
8	X? 2433586.693	2433544.44[EXE]	
9	Z? 54	80[EXE]	
10	F=21.99767746	[EXE]	
11	Y=250547.403	250543.2955[EXE]	
12	B=21 ° 58 ′ 47.08 ″	[EXE][SHIFT][←]	
13	L=2 ° 25 ′ 31.49 ″	[EXE][SHIFT][←]	
14	R=0 ° 54 ′ 29.72 ″	[EXE][SHIFT][←]	

提示

fx-4800P 是使用 15 位尾数进行内部计算，但小数位最多只能显示 9 位数字，按键[SHIFT][←]将十进制的度变换位六十进制的 ° ′ ″ 后，秒位最多只能显示到 0.01 ″，要想调出计算器中的 1/10000 秒位，可以按下列步骤进行操作(以调出 B 存储器中的纬度为例)：

[RCL][B][—]**21**[°′″]**58**[°′″]**47**[°′″][=][×]**3600**[=]屏幕显示的 **0.084388614** 即为全部小数秒数值，故精确的纬度值应为 21 ° 58 ′ 47.0844 ″。同理可以求出经差为 L=2 ° 25 ′ 31.488 ″，子午线收敛角为 γ =0 ° 54 ′ 29.7197 ″。